Элементы теории вероятностей и статистики в задачах ОГЭ-2020

Оглавление

Необходимые теоретические сведения

Статистическое определение вероятности.

Если в $\boldsymbol{n}$ опытах нужное нам событие $\boldsymbol{A}$ повторилось n_A раз, то величина $p^* = \frac{n_A}{n}$ называется частностью события $\boldsymbol{A}$. При увеличении числа опытов $\boldsymbol{n}$, величина p^* будет меняться, но можно заметить ее колебание вокруг некоторого числа p, к которому при больших значениях $\boldsymbol{n}$ оно будет неуклонно приближаться. Число p называется вероятностью события $\boldsymbol{A}$.

Преимущество этого определения: опытным путем можно находить вероятности многих событий.

Недостатки: необходимо проводить большое число опытов.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью наступления события A в некотором испытании равна отношению $p = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех <u>равновозможных</u>, <u>элементарных</u> исходов данного испытания, которые образуют <u>полную группу событий</u>;

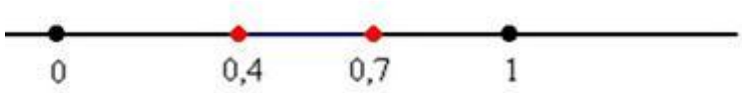
m – количество <u>элементарных</u> исходов, благоприятствующих событию A.

Здесь сразу делается допущение, что все элементарные события (события, которые непосредственно появляются в результате опыта), равновероятны.

Геометрическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Даже правильнее сказать, не недостатков, а ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. Простейший пример:

На отрезок $[0,1]$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток $[0{,}4;0{,}7]$?



Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу $P(A)=\dfrac{m}{n}$ *(ввиду бесконечно большого значения «эн»)* и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый **геометрическим определением вероятности**.

Всё очень похоже: вероятность наступления некоторого события A в испытании равна отношению $P(A)=\dfrac{g}{G}$, где G – *геометрическая мера*, выражающая общее число <u>всех возможных</u> и <u>равновозможных</u> исходов данного испытания, а g – *мера*, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

Рассмотрим событие: A – брошенная на отрезок $[0,1]$ точка, попала в промежуток $[0{,}4;0{,}7]$. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной большего отрезка: $G=1-0$ ед., а благоприятствующие событию A исходы – длиной вложенного отрезка: $g=0{,}7-0{,}4=0{,}3$ ед.

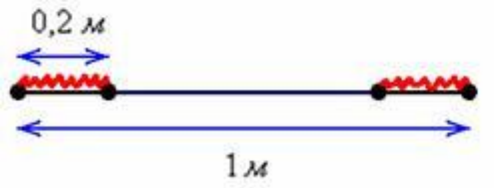
По геометрическому определению вероятности: $P(A)=\dfrac{g}{G}=\dfrac{0{,}3}{1}=0{,}3$

Примеры решения задач

№ 1.

Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

Решение: «чего тут сложного? Вероятность равна 1/5-й». Это автоматическая ошибка, которую допускают по небрежности. Да, совершенно верно – длина обрезка составит не менее 80 см, если от ленты отрезать не более 20 сантиметров. Но здесь часто забывают, что искомый разрез можно сделать **как с одного** конца ленты, **так и с другого**:



Рассмотрим событие: A – длина обрезка составит не менее 0,8 м.

Поскольку ленту можно разрезать где угодно, то общему числу исходов соответствует её длина: $L = 1м$. Благоприятствующие событию A участки разреза отмечены на рисунке красным цветом и их суммарная длина равна: $l = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4м$ По геометрическому определению:

$$P(A) = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4$$.

Ответ: 0,4

№ 2

Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

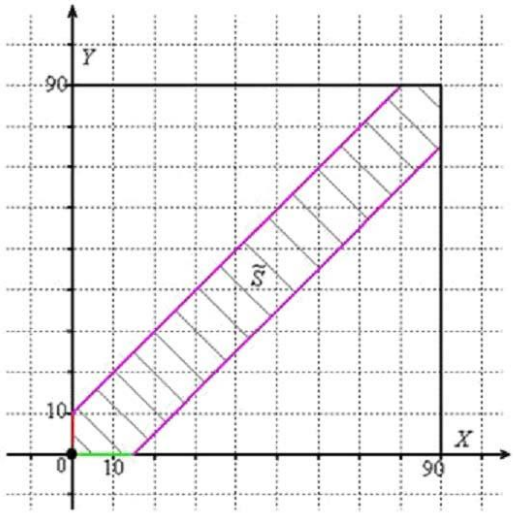
Решение: сначала выясняем длительность временного промежутка, на котором может состояться встреча. В данном случае, как уже отмечено выше, это полтора часа или 90 минут. При этом здесь не имеют особого значения фактические временные рамки – погрузка автомобилей, может состояться, например, утром с 8.30 до 10.00, и решение будет точно таким же.

Вычисления допустимо проводить как в долях часа, так и в минутах. На мой взгляд, в большинстве случаев удобнее работать с минутами – меньше путаницы.

На первом шаге изобразим прямоугольную систему координат, где в подходящем масштабе построим квадрат размером 90 на 90 единиц; при этом одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а его смежные стороны лежат на координатных осях.

Общему множеству исходов будет соответствовать площадь данного квадрата: $S = 90^2 = 8100$. Размерность лучше указать в квадратных единицах, поскольку квадратные минуты смотрятся как-то неудачно.

Далее по оси OX от начала координат откладываем время погрузки одного автомобиля (зелёная линия), а по оси OY – время погрузки другого автомобиля (красная линия) *(можно наоборот, это не повлияет на решение)*:



Теперь из правого конца зелёного отрезка и из верхнего конца красного отрезка под углом 45 градусов проводим две линии внутри квадрата (малиновые отрезки).

Множеству благоприятствующих исходов (когда автомобили «пересекутся» во времени) соответствует площадь $\tilde{S}$ заштрихованной фигуры. В принципе, её можно вычислить «на пальцах», но технически проще найти площади двух прямоугольных треугольников с помощью формулы $S = \frac{1}{2}ab$, где a, b – длины катетов. Обратите внимание, что в общем случае эти треугольники **не равны**. У нас: верхний треугольник имеет катеты длиной по 80 единиц, нижний треугольник – по 75 единиц. Таким образом, суммарная площадь треугольников составляет:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 75 = 6012{,}5$$.

И бесхитростный заключительный манёвр: из площади квадрата вычитаем площади треугольников, получая тем самым благоприятствующую площадь:

$$\tilde{S} = S - S' = 8100 - 6012{,}5 = 2087{,}5$$

По геометрическому определению:

$$p = \frac{\tilde{S}}{S} = \frac{2087{,}5}{8100} \approx 0{,}26$$ – вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой.

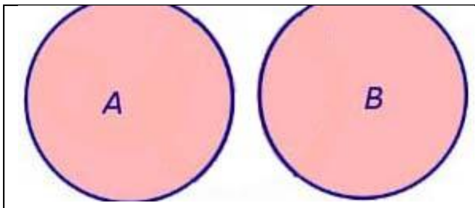
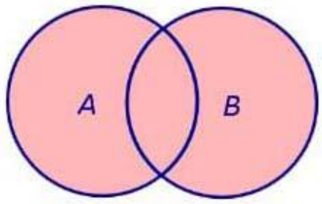
Ответ: $\approx 0{,}26$

Еще немного важной теории

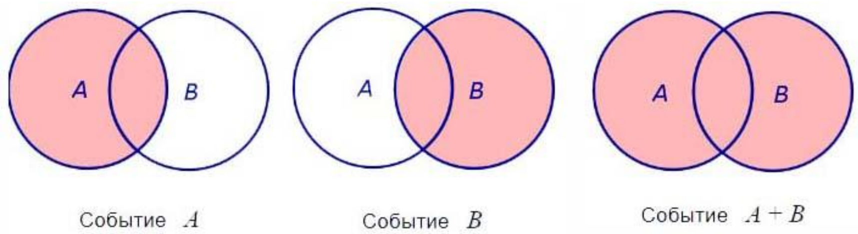
Правило суммы.

Пусть некоторый объект А можно выбрать n различными способами, а другой объект В можно выбрать m способами. Тогда существует $n+m$ способов выбрать либо объект А, либо объект В.

События называются *независимыми*, если, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

	
Независимые события	*Зависимые события*

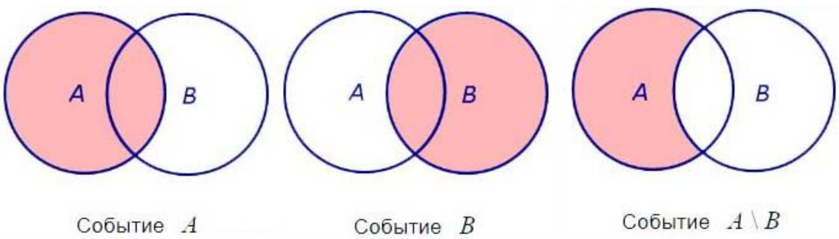
Суммой двух событий A и B называется событие $C=A+B$ или $C=A\bigcup B$, которое происходит, только тогда, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B.



$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ -если события зависимые

$P(A+B)=P(A)+P(B)$ -если события независимые

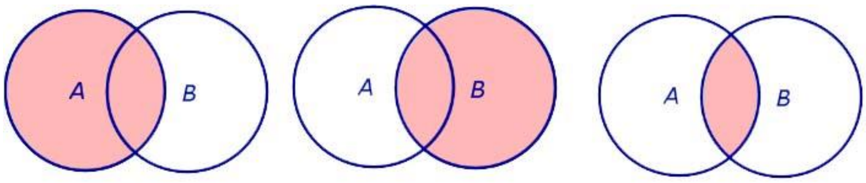
Разностью событий А и В называют событие $C=A-B$, состоящее из тех элементов события А , которые не входят в событие В:



Правило произведения.

Пусть объект А можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (А,В) можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Произведением (пересечением) двух событий А и В называют такое событие $C = A \cdot B$ или $C = A \bigcap B$, которое состоит из всех элементов, входящих как в событие А, так и в событие В.



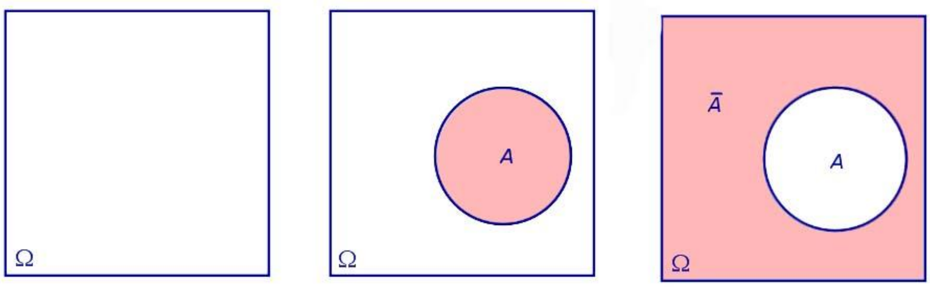
Событие A Событие B Событие $A \cdot B$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ - для независимых событий

$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ - зависимых событий, где $P(B \mid A)$ - вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Противоположное событие

Противоположным событием к событию А называют событие $C = \overline{A}$, состоящее из тех элементов всего множества элементарных событий Ω, которые не входят в событие А.



Множество Ω Событие A Событие $\bar{A}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Примеры решения задач

№ 3

В небольшом магазине работают два продавца - Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Василий, а Сергей свободен.

По рисунку несложно найти вероятность работы Василия без Сергея, т.е. чисто зеленую часть Васечкиного круга. Для этого из полного круга вычитаем сине-зеленую часть: 0,4-0,3=0,1

А если нужно найти, вероятность того, что они оба свободны?

0,4-0,3=0,1 занят один

0,1+0,3+0,1=0,5 - заняты оба или кто-то один

1-0,6=0,4 - оба свободны

№ 4

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени а) все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга) б) занято два продавца, а один свободен в) занято хотя бы 2 продавца, а один свободен г) занято не более двух продавцов д) занят только одни продавец е) никто не занят

Решение.

а) Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,216$.

б) Вероятность, того, что третий продавец свободен, равна 1-0,6=0,4. Тогда вероятность того, два продавца, а один свободен равна $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,144$

в) Вероятность, того, что занято хотя бы 2 продавца, а один свободен – это вероятность того, что занято либо 3 продавца, либо два: $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,216 + 0,144 = 0,36$

г) Вероятность, того, что занято не более двух продавцов – это вероятность того, что либо никто не занят, либо занят один, либо занято 2:

$$0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,064 + 0,096 + 0,144 = 0,304$$

д) Вероятность, того, что занят только одни продавец:

$$0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}096$$

е) Вероятность, того, что никто не занят: $0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}064$

№ 5

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2

Решение

Общее количество исходов: $6\times 6=36$. Пусть обозначение $a-b$ означает, что на первом кубике выпало a очков, а на втором кубике b очков.

а) Варианты, когда разница составляет 1: 6-5=5-4=4-3=3-2=2-1 (5 вариантов) и столько же наоборот, 5-6=4-5=3-4=2-3=1-2, т.е. всего 10 вариантов.

Варианты, когда разница составляет 2: 6-4=5-3=4-2=3-1 (4 вариантов) и столько же наоборот, 4-6=3-5=2-4=1-3, т.е. всего 8 вариантов.

Тогда всего вариантов 18. Ищем отношение по формуле $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}=0{,}5$

№ 6. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлить до тысячных.

Всего исходов: $6\times 6\times 6=216$.

Варианты, дающие сумму 9 очков:

1+2+6=1+3+5=1+4+4=1+5+3=1+6+2 5 вариантов,

2+1+6=2+2+5=2+3+4=2+4+3=2+5+2=2+6+1 – 6 вариантов

3+1+5=3+2+4=3+3+3=3+4+2=3+5+1 – 5 вариантов

4+1+4=4+2+3=4+3+2=4+4+1 – 4 варианта

5+1+3=5+2+2=5+3+1 – 3 варианта

6+1+2=6+2+1 – 2 варианта

Т.е. всего нужных вариатов: 2+3+4+5+6+5=25

Тогда ответ: $\frac{25}{216}=0{,}115740..\approx 0{,}116$

№ 7

Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что последние четыре цифры состоят из двух повторяющихся групп по 2 различные цифры, например 0404 или 5252?

Т.к. цифры выбираются случайным образом, то вероятность мы будем искать по формуле: $P = \frac{m}{n}$, m - число благоприятных событий, а n - всевозможных.

Если взять цифры от 0 до 9, то всего их будет 10. В этом нетрудно убедиться, просто расписав их. Это значит, что чисел от 0 (в данном случае, от 00) до 99 - 100.

При этом нас не интересуют следующие комбинации: 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, т.к. в условии задачи сказано, что группа состоит из двух различных цифр.

Итак, благоприятных событий - 90.

Посчитаем всевозможные события. Цифры стоят на четырех позициях и могут быть любыми из 10 различных (от 0 до 9), т.е. всевозможных событий - 10^4 = 10 000.

Найдем вероятность: Р = 90 : 10 000 = 0,009.

Ответ: 0,009.

№ 8

Алексей получает паспорт. Последние три цифры номера паспорта – случайные. Найти вероятность того, что последние три цифры – это цифры 2, 4 и 6 в каком порядке.

Число перестановок из трех чисел равно: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. А всего на трех последних местах могут находиться цифры от 0 до 9, т.е. всего вариантов $10^3 = 1000$. Значит, ответ: $\frac{6}{1000} = 0{,}006$

№ 9

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

0,3 –вероятность того, что батарейка неисправна;

1–0,003=0,97- вероятность того, что батарейка исправна;

Батарейка будет забракована в случаях: она неисправна и ее забракуют (вероятность этого события:0,03*0,97) или она исправна и ее забракуют (вероятность этого события: 0,97*0,02). Тогда вероятность, что ее забракуют:

$$0{,}03 \cdot 0{,}97 + 0{,}97 \cdot 0{,}02 = 0{,}0485$$

№ 10

В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 980 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

Из 2000 появившихся на свет младенцев мальчиков: 2000-980=1020. Частота их рождения равна: 1020:2000=0,51

Ответ: 0,51

№ 11

Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

Всего возможно шесть различных вариантов того, как упадет кубик Дины. Больше трех очков выпадает 3 раза: 4, 5 и 6. Значит, вероятность выигрыша равна 3 / 6 = 0,5.

№ 12

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт?

Ответ: $6:8=0{,}75$

№ 13

Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Сережа и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Сережа и Маша окажутся рядом?

Если Сережа встанет в любое место хоровода, то для того, чтобы Маша была с ним рядом, она может встать либо слева от него, либо справа. Т.е. всего 2 варианта. А всего Маша может занять 8 мест (кроме места Сергея). Тогда ответ: 2:8=0,25

№ 14

Андрей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найти вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Эта вероятность $p=(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8)\cdot 0{,}8=0{,}032$ - произведение вероятностей того, что не будет отправлена с первых двух и будет отправлена с третьей.

Ответ: 0,032.

№ 15

В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Найдем сначала вероятность того, что чай закончится или в 1-м или во 2-м автоматах. По условию задачи известно, что вероятность того, что чай закончится в автомате, равна 0,4. Обозначим через событие А – чай закончится в 1-м автомате, а через В – чай закончится во втором автомате. Тогда вероятность того, что чай закончится или в 1-м или во 2-м автоматах, равна вероятности суммы этих двух событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}4+0{,}4-0{,}2=0{,}6.$$

Тогда вероятность того, что чай останется в обоих автоматах равна 1-0,6=0,4

№ 16

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.

Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1)+P(AB_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=$$
$$=0,4\cdot P(B_1)+0,2\cdot(1-P(B_1))=0,2P(B_1)+0,2.$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1)=(0,35-0,2):0,2=0,75.$$

Это решение можно записать коротко. Пусть x — искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Тогда $1-x$ — вероятность того, что куплено яйцо, произведенное во втором хозяйстве. По формуле полной вероятности имеем:

$$0,4x+0,2(1-x)=0,35\Leftrightarrow 0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Ответ: 0,75.

Приведем другое решение.

Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агрофирма закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x+0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

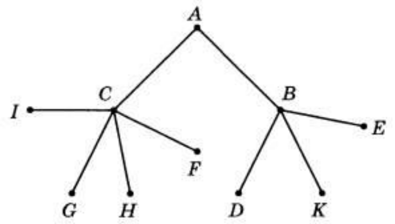
$$\frac{0,4x+0,2y}{x+y}=0,35\Leftrightarrow 0,4x+0,2y=0,35(x+y)\Leftrightarrow 0,05x=0,15y\Leftrightarrow x=3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y}=\frac{3}{4}=0,75.$$

№17

Павел Иванович совершает прогулку из точки А по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.



В точке A Павел Иванович может случайным образом выбрать один маршрут из двух, т.е. вероятность выбора маршрута в сегмент, ведущий в точку G будет равен $\frac{1}{2}$. Затем, чтобы попасть в точку G, Павел Иванович должен в точке C выбрать нужное направление из 4 возможных, т.е. вероятность в этой точке выбора направления в точку G будет равна $\frac{1}{4}$.

В результате, вероятность попадания из A в G равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Задачи для самостоятельного решения

№ 1

В фирме есть два микроавтобуса. Каждый из них в случайный момент времени свободен с вероятностью 0,43. Какова вероятность того, что в случайный момент ни один из микроавтобусов не будет свободен.

Ответ: 0,3249

№ 2

В магазине одежды в случайный момент каждый продавец занят с покупателем с вероятностью 0,2. Всего продавцов трое. Найдите вероятность того, то в случайно выбранный момент хотя бы один из продавцов свободен

Ответ: 0,992

№ 3

В магазине одежды в случайный момент каждый продавец занят с покупателем с вероятностью 0,1. Всего продавцов трое. Найдите вероятность того, то в случайно выбранный момент хотя бы один из продавцов свободен

Ответ: 0,999

№ 4

После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

Ответ: 1/6

№ 5

В треугольник со сторонами $a=9$, $b=13$, $c=16$ вписан круг. Точка M произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

Напоминаю, что вписанный круг лежит внутри треугольника и касается его сторон в 3 точках.

Ответ: ≈0,51.

№ 6

Старшеклассники случайным образом приходят в столовую с 14.00 до 15.00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что: а) Коля встретится с Олей во время обеда, б) данная встреча не состоится.

Ответ: а) 5/9 б) 4/9