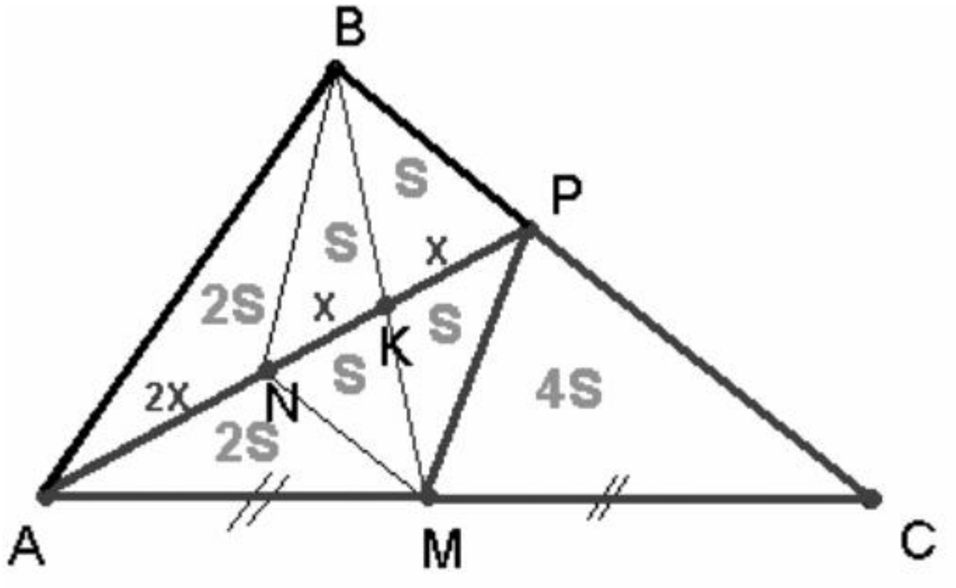
Задание №24

Примеры решений различных прототипов заданий ОГЭ 2020

№ 1

Через середину *K* медианы *BM* треугольника *ABC* и вершину *A* проведена прямая, пересекающая сторону *BC* в точке *P*. Найдите отношение площади треугольника *ABC* к площади четырёхугольника *KPCM*.

Решение:



$S_{KPCM} = 5S$

$S_{\Delta ABC} = 12S$

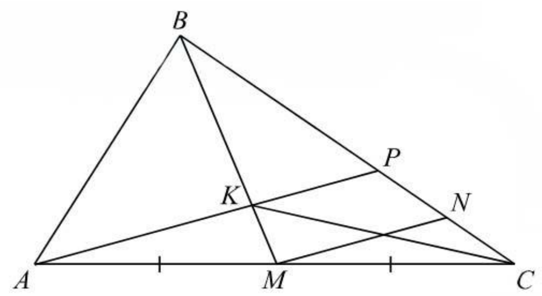
$\frac{S_{ABC}}{S_{KPCM}} = \frac{12}{5}$

Ответ: 2.4

№ 2

В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение:



Пусть площадь треугольника ABC равна S. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, значит, $S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{S}{2}$.

У треугольников ABK и ABM высота, проведенная к стороне BM общая, поэтому площади этих треугольников относятся как их основания BK и BM откуда: $S_{ABK} = \frac{BK}{BM} S_{ABM} = \frac{4}{5} S_{ABM} = \frac{2}{5} S$

Проведём прямую MN, параллельную AP. Точка M — середина AC следовательно, MN — средняя линия треугольника APC, значит, $PN = CN$.

По теореме Фалеса для угла MBC находим: $\frac{BP}{PN} = \frac{BK}{KM} = \frac{4}{1}$, а так как $PN = CN$ получаем, что $\frac{BP}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Стороны треугольников BKP и BMC сонаправлены, их площади относятся как произведение отношений сонаправленных сторон, поэтому $\frac{S_{BKP}}{S_{BMC}} = \frac{BK}{BM} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

Т.е. $S_{BKP} = \frac{8}{15} S_{BMC}$, откуда $S_{KPCM} = \frac{7}{15} S_{BMC} = \frac{7}{30} S$

Тем самым, для искомого отношения площадей имеем:

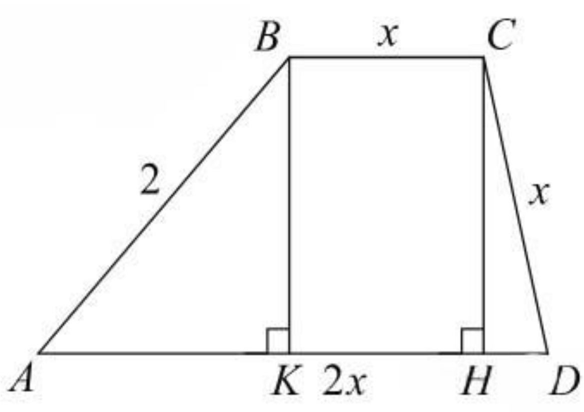
$$\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{\frac{2}{5}S}{\frac{7}{30}S} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}.$$

Ответ: $1\frac{5}{7}$

№ 3

В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 2. Найдите площадь трапеции.

Решение:



Пусть длина стороны BC равна x тогда длина стороны CD — x, а стороны AD — $2x$ Проведём высоты BK и CH в трапеции. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHD и найдём из него отрезок HD:

$$HD = CD \cdot \cos \angle ADC = \frac{x}{2}$$

Рассмотрим четырёхугольник $KBCH$, BK равно CH и прямая BK параллельна CH поскольку обе эти прямые перпендикулярны прямой AD, следовательно, $KBCH$ — параллелограмм, значит, $BK = CH$ и $BC = KH = x$. Найдём отрезок AK:

$$AK = AD - KH - HD = 2x - x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Рассмотрим треугольники ABK и CHD — они прямоугольные, $AK = HD = \frac{x}{2}$, $BK = CH$ следовательно, эти треугольники равны, значит, $AB = CD = DC = 2$, $AD = 4$.

Найдём высоту CH из треугольника CHD:

$$CH = CD \cdot \sin \angle ADC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

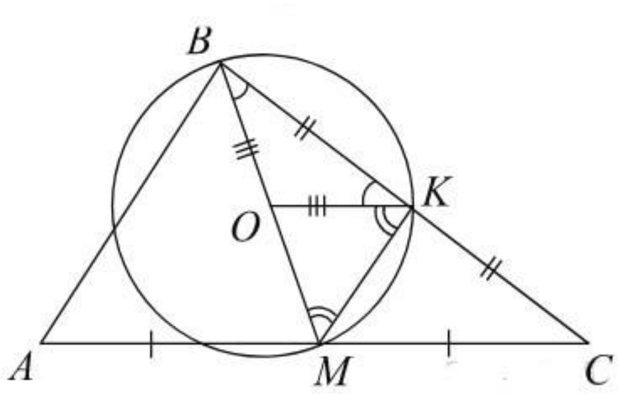
$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $3\sqrt{3}$

№ 4

Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Решение:



Введём обозначения, как показано на рисунке. Рассмотрим треугольник BOK — он равнобедренный, следовательно, $\angle OBK = \angle BKO$. Аналогично в треугольнике OKM имеем: $\angle OMK = \angle OKM$. Теперь рассмотрим треугольник MBK: сумма его углов равна 180°, поэтому

$$\angle MBK + \angle BKM + \angle KMO = 180^0$$

Поскольку кроме этого $\angle BKM = \angle BKO + \angle OKM$, имеем:

$$2\angle BKO + 2\angle OKM = 180^0 \Leftrightarrow \angle BKO + \angle OKM = 90^0 \Leftrightarrow \angle BKM = 90^0.$$

Рассмотрим треугольники BMK и MKC они прямоугольные, имеют общий катет и $BK=KC$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $BM=MC$.

Точка M отстоит на равное расстояние от всех трёх вершин треугольника, $AM=MC=BM$, следовательно, точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Радиус описанной окружности

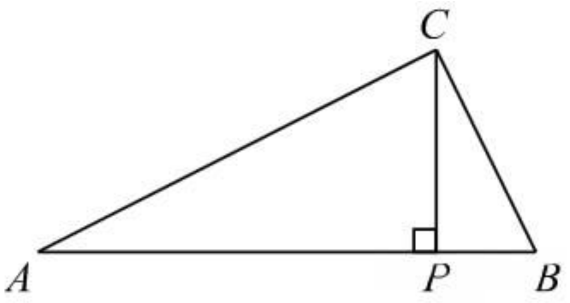
$$R = AM = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2

№ 5

Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CP*. Радиус окружности, вписанной в треугольник *BCP*, равен 96, тангенс угла *BAC* равен $\frac{8}{15}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:



Заметим, что ∠CAB = 90° − ∠CBA = ∠PCB, так что треугольник *ABC* подобен треугольнику *CBP*.

Пусть радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равен *r*, тогда $\frac{96}{r} = \frac{BC}{BA} = \sin\angle BAC$.

Поскольку тангенс угла *BAC* равен $\frac{8}{15}$, получаем, что $\sin\angle BAC = \frac{8}{17}$.

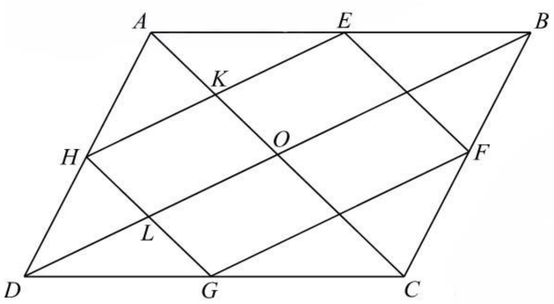
Значит $\frac{96}{r} = \frac{8}{17}$, откуда *r = 204.*

Ответ: 204

№ 6

Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 56.

Решение:



Введём обозначения, как показано на рисунке. Поскольку $HG \parallel AC$ и $HE \parallel BD$, получаем, что $HKOL$ — параллелограмм, следовательно, углы KHL и KOL равны.

Рассмотрим треугольники ABC и EBF, угол EBF — общий, углы BEF и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, углы BFE и BCA — аналогично, следовательно, треугольники ABC и BEF подобны по двум углам. Откуда $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$. Аналогично подобны треугольники ABD и AEH, откуда $\frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB}$.

Пусть сторона ромба равна a, а длина короткой диагонали равна d.

Сложим два полученных уравнения:

$$\frac{EF}{AC} + \frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB} + \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{d} + \frac{a}{56d} = \frac{AE+BE}{AB} \Leftrightarrow \frac{56a+a}{56d} = \frac{AB}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 57a = 56d \Leftrightarrow a = \frac{56d}{57}.$$

Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними: $S_{HEFG} = a^2 \sin \angle KHL$. Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle KOL = d \cdot 56d \cdot \sin \angle KOL$.

Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

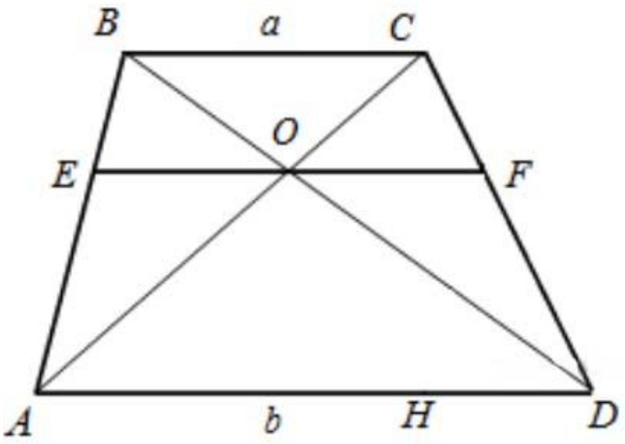
$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2 \sin \angle KHL}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot 56d \cdot \sin \angle KOL} = \frac{a^2}{28d^2} = \frac{d^2 \frac{56^2}{57^2}}{28d^2} = \frac{112}{3249}$$

Ответ: $\frac{112}{3249}$

№ 7

Основания трапеции относятся как 1:2. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

Решение:



Введём обозначения, как показано на рисунке. Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, равен среднему гармоническому её оснований. Пусть $BC = a$, тогда $AD = 2a$ и $EF = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a}} = \dfrac{4a}{3}$. Поскольку треугольники BOC и AOD подобны, их высоты h_{AOD} и h_{BOC}, проведенные соответственно к сторонам AD и BC относятся как 2:1. Тем самым, для отношения искомого отношения площадей трапеций $EBCF$ и $AEFD$ имеем:

$$\frac{S_{EBCF}}{S_{AEFD}} = \frac{\dfrac{BC+EF}{2}h_{BOC}}{\dfrac{EF+AD}{2}h_{AOD}} = \frac{a+\dfrac{4}{3}a}{\dfrac{4}{3}a+2a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3a+4a}{4a+6a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{20}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{20}$